数理解析研究所講究録
50巻 1968年 58-65

Exotic characteristic classes について

京大 数研 西田吾郎

§1 序

Fibreが球面とホモトピー同値であるような fibre space は spherical fibre space とよばれる。Spherical fibre spaceに対して、vector bundleと同様に classifying space B_{SF} が存在することが知られている。従ってその特性類を決定する事は $H^*(B_{SF}; G)$ を決定する事と同値である。ここに G は係数群である。G が位数 p の素体 Z_p の場合は、最近 土屋[ ]によって、そのHopf algebra構造が決定された。特性類を定義する方法はいくつかあるが、その一つは cohomology operation を用いる Thom-Wuの方法である。ξ を底空間X上の spherical fibre space, T_ξ, U_ξ, Φ_ξ をそれぞれ ξ のThom複体 Thom類 Thom同型とする。P^i を Steenrod の reduced p-power とするとき

$$\mathcal{E}_n = \Phi_\xi^{-1}(\mathcal{P}^n(U_\xi)) \in H^{2n(p-1)}(X, Z_p)$$

は Wu 特性類とよばれる。ただし p は奇素数。この時 Peterson-Toda [ ] によって次の事が知られている。

$$H^*(B_{SF}; Z_p) = Z_p[\mathcal{E}_n] \otimes \Lambda(\beta\mathcal{E}_n) \otimes C$$

ここに β は Bockstein 作用素，C はある Steenrod 環上の Hopf algebra である。（従って，C は Thom 類の上の primary cohomology operation では定義できない。）

ここでは、C のある元を secondary cohomology operation で定義する F. P. Peterson [ ] の方法及びそれに関連した注意を述べる。

§2 Algebraic bundle

A を Z_p 上の cocommutative, coassociative, connected graded Hopf-algebra とする。又 R を graded A-algebra with unit で次の条件をみたすものとする。ただし P は素数。

$$a(1) = 0 \quad \text{if } \deg(a) > 0.$$

定義．ξ ; A → R (linear map) は次の条件をみたすとき R 上の A-bundle とよばれる。

(1) $\xi(1) = 1$

(2) $\xi(ab) = \sum (-1)^{|a''||b|} a'\xi(b) \cdot \xi(a'')$.

ここに $\psi(a) = \sum a' \otimes a''$ は diagonal map, $|a| = \deg a$.

A, R を上述の通りとする。 AとRの semi tensor 積 $R\odot A$とは、vector space としては $R\otimes A$ と同型であって、その積は、$(m\otimes a)\cdot(n\otimes b)=\sum(-1)^{|a''||n|}m\cdot a'(n)\otimes a''b$ で与えられる。 今 R上の A-bundle ξ が与えられた時、θ_ξ を

$$A \xrightarrow{\Psi} A\otimes A \xrightarrow{\xi\otimes 1} R\otimes A \cong R\odot A$$

で定義する。 又、ξ の "negative" ξ^* を次の方法で帰納的に定義されたAからRへの linear map とする。

$$\xi^*(1)=1, \quad \sum \xi^*(a')\cdot\xi(a'')=0 \quad \text{for } \Psi(a)=\sum a'\otimes a''.$$

定理1 θ_ξ は algebra の homomorphism である。

定理2. $\xi^*; A \longrightarrow R$ は R上の A-bundle である.

1は, Aの coassociativity と $R\odot A$ の定義から容易に確かめられる。 定理2も、複雑ではあるが、直接的な計算によって証明できる。

注意、ξ^*がξの negative である理由は次の通りである。今 二つのR上の A-bundle ξ, ηが与えられた時、ξとηの Whitney和 $\xi\oplus\eta$を

$$A \xrightarrow{\Psi} A\otimes A \xrightarrow{\xi\otimes\eta} R\otimes R \xrightarrow{\text{product}} R$$

と定義すると、$\xi\oplus\eta$ もR上の A-bundle となる。又 $\varepsilon; A\longrightarrow R$ を $\varepsilon(1)=1$, $\varepsilon(a)=0$ if $\deg a>0$ とすれば εもR上の A-bundle であって、次の事実が成り立つ。

R上のA-bundle ξに対して，　$\xi \oplus \xi^* = \varepsilon$

§3. exotic characteristic class の定義

この節では、Aとして mod p Steenrod algebra $\mathcal{A}_p$, R としては、$H^*(X;Z_p)$をとる。　ξを底空間X上の，stable spherical fibre space とする。このとき A $=\mathcal{A}_p$から R $=H^*(X;Z_p)$への linear map ξを等式　$a(U_\xi)=\xi(a)\cup U_\xi$ で定義する。ここに $a\in\mathcal{A}_p$. U_ξはξの Thom 類である。

定理3. $\xi;\mathcal{A}_p \longrightarrow H^*(X;Z_p)$ は $H^*(X;Z_p)$ 上の $\mathcal{A}_p$-bundle

（証明）　$\xi(1)=1$ は明らか。

$$\xi(ab)\cup U_\xi = ab(U_\xi) = a(\xi(b)\cup U_\xi)$$

$$=\sum(-1)^{|a''||b|}a'(\xi(b))a''(U_\xi) = \sum(-1)^{|b||a''|}a'(\xi(b))\cdot\xi(a'')\cup U_\xi$$

従って (2)も成り立つ。

定理4. ξを上の通りとし、ξ^*をその negative とする。このとき $\mathcal{A}_p \ni a$, $H^*(X;Z_p)\ni x$に対して

$$\theta_{\xi^*}(a)(x\cup U_\xi) = a(x)\cup U_\xi$$

特に $\deg a>0$ ならば、　$\theta_{\xi^*}(a)(U_\xi)=0$.

（証明）　ξは stable であるから $\deg U_\xi$は even であるとしてよい。　$\mathcal{A}_p$の coassociativity と ξ^*の definition より

$$\theta_{\xi^*}(a)(x\cup U_\xi) = \sum \xi^*(a')(a'')'(U_\xi)\cdot(a'')''(x)$$

$$=\sum \xi^*((a')')\,\xi((a')'')\,U_\xi\cdot a''(x) \quad = a(x)\cup U_\xi$$

従って Thom類の上への"twisted"な primary operation は常に trivial であり，Thomas[ ]の方法により，twisted な secondary operation が定義できる。Thomas の方法は長々しいが universal example を用いる標準的なものであるから略して結果だけ述べる事にする。

今 $f ; Y \to X$ を topological spaces とその continuous map とし，$B \subset Y$ とする。f^* によって $H^*(Y, B ; Z_p)$ は $H^*(X ; Z_p)$-module であり，従って $H^*(X ; Z_p) \odot \mathcal{A}_p$-module である。$\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta} = \sum \alpha_i \cdot \beta_i = 0 \in (H^*(X ; Z_p) \odot \mathcal{A}_p)^{q+1}$ を一つの relation とする。このとき，

定理5　次のような (twisted) secondary operation $\Phi_{\alpha,\beta}$ が存在する。

$$\Phi_{\alpha,\beta} ; H^t(Y, B) \cap (\cap \operatorname{Ker} \beta_i) \longrightarrow H^{t+q}(Y, B) / \sum \operatorname{Im} \alpha_i.$$

さて ξ を X 上の $(n-1)$-spherical fibre space，(Y, B) をその Thom 複体とする。$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum a_i \cdot b_i = 0 \in (\mathcal{A}_p)^q$ を $\mathcal{A}_p$ の relation とすると，$\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta} = \theta_{\xi^*}(\underline{a}) \cdot \theta_{\xi^*}(\underline{b}) = 0$ は定理1により $H^*(X ; Z_p) \odot \mathcal{A}_p$ の relation である。従って定理4，定理5より次のような operation を得る。

$$\Phi_{a,b}^{\xi^*} ; H^n(T_\xi) \longrightarrow H^{n+q}(T_\xi) / \sum \operatorname{Im} \theta_{\xi^*}(a_i)$$

特別の場合として Φ_s^{ξ}を次の relation で定義される twisted secondary operation とする。(P: odd の場合)

$$\mathcal{P}^{p^{s-1}(p-1)}\mathcal{P}^{p^{s-1}} + \sum_{i=1}^{p^{s-1}-1} \lambda_i \mathcal{P}^{p^s-i}\mathcal{P}^{i} = 0. \quad (*)$$

定理6. Φ_s^{ξ}は Indeterminacy を持たない。

証明は容易である. さて, 以上の事から (secondary) な exotic characteristic class e_s は次の様に定義される。

定義. $e_s(\xi) = \Phi_\xi^{-1}\Phi_s^{\xi}(U_\xi) \in H^{2p^s(p-1)-1}(X; Z_p)$

定理7. ξを B_{SF} 上の universal fibre space とする。このとき, $e_1(\xi) \neq 0$. (Gitler-Stasheff)

注意1. 今, $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$ を $\mathcal{A}_p$の relation とする。 ξを X上の spherical fibre space で, $U_\xi \in \bigcap \ker b_i$ なるものとする。従って U_ξに通常の secondary operation $\Phi_{a,b}$ が定義できる。この時, 一般には, $\Phi_{a,b}(U_\xi) \neq \Phi_{a,b}^{\xi*}(U_\xi)$ である。その例として, ξを $\pi_4(BSO) \cong Z \ni 2\cdot$generator に対応する S^4上の vector bdle とする。又, relation としては $Sq^1 Sq^4 + Sq^2 Sq^3 + Sq^4 Sq^1 = 0$ をとる。この時, $\Phi(U_\xi) \neq 0$ であり $\Phi^{\xi*}(U_\xi) = 0$ である。 実際, $\Phi^{\xi*}(U_\xi)$は ξ の特性類であり ξは vector bundle であるから $\Phi^{\xi*}(U_\xi)$ は Stiefel-Whitney 類の多項式である。しかるに, ξの S-W 類は明らかにすべて 0 である。 従って $\Phi^{\xi*}(U_\xi) = 0$.

しかしながら e_sを定義する secondary operation Φ_s^{ξ} に対しては $\Phi_s^{\xi} \neq \Phi_s$ かどうかは わからない。ただし Φ_s は Φ_s^{ξ}と同じ relation に対応する untwisted な secondary operation である。次の注意に示すように もし $\Phi_s^{\xi}=\Phi_s$ ならば $e_s \neq 0$が証明できる。

注意2. [ ]の方法によって 次のような finite CW complex K_sとその上の spherical fibre space ξ_sを構成する事ができる。$g_i(\xi_s)=0$ ただし $i<p^s$, $g_{p^s}(\xi_s)\neq 0$ 従って Thom 類 U_s 上に Φ_s が定義できて $\Phi_s(U_s)\neq 0$.

参考文献.

[1] F. P. Peterson; Twisted cohomology operations and exotic characteristic classes. to appear.

[2] F. P. Peterson - H. Toda; On the structure of $H^*(B_{SF}; Z_p)$. J. of Math. Kyoto Univ. (1967).

[3] E. Thomas; Postnikov invariants and higher order cohomology operations

[4] H. Toda; Extended p-th powers of Complexes and applications to homotopy theory. Proc of Japan Academy vol 44. (1968)

[5] A. Tsuchiya; Characterisic classes for spherical fibre space. to appear